10.1.10 Výpočty limit I

Předpoklady: 10107

Už umíme limity rozeznat z grafů (a nakreslit odpovídající grafy) a definovat. Ještě se musíme naučit limity zjišťovat (počítat).

Kolik je $\lim_{x\to 3} 2x-3$?

Jednoduché: funkce $y=2x-3$ je spojitá v každém bodě $\Rightarrow$ v každém bodě se její limita musí rovnat funkční hodnotě $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 3} 2x-3 = 2\cdot 3-3=3$

Př. 1: Urči limity:

a) $\lim_{x\to -2} 2^x-2$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}$ c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+2}$ d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\sin x$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

a) $\lim_{x\to -2} 2^x-2$

funkce $y=2^x-2$ je spojitá v R $\Rightarrow$ $\lim_{x\to -2} 2^x-2=2^{-2}-2=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}$

funkce $y=\frac{x-1}{x+1}$ je spojitá v $R-\{-1\}$ (v –1 limitu naštěstí počítat nemusíme) $\Rightarrow$

$\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+2}$

funkce $y=\frac{x^2-1}{x+2}$ je spojitá v $R-\{-2\}$ (v –2 limitu naštěstí počítat nemusíme) $\Rightarrow$

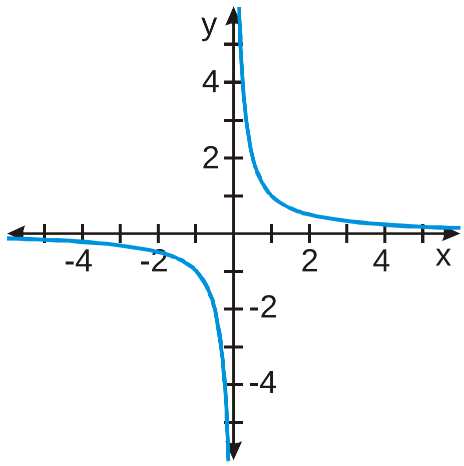
$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{(-1)^2-1}{-1+2}=\frac{0}{1}=0$

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\sin x$

funkce $y=\sin x$ je spojitá v R $\Rightarrow$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

funkce $y=\frac{1}{x}$ je spojitá v $R-\{0\}$, bohužel právě v 0 máme limitu určit $\Rightarrow$ nemůžeme použít funkční hodnotu (ta dokonce ani neexistuje) $\Rightarrow$ graf funkce

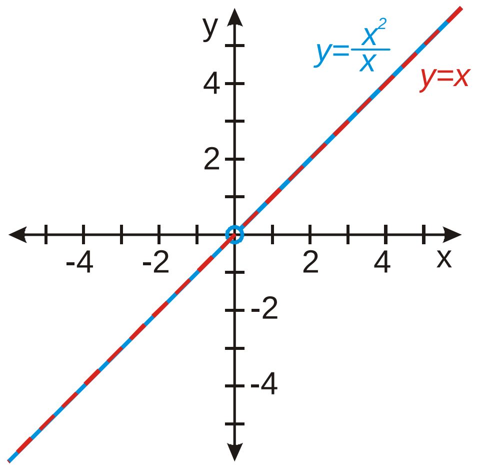


$\Rightarrow$ když se x blíží k nule, směřují hodnoty z každé strany jinam $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje

Jak je to s $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}$?

Na první pohled stejně jako s $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$: funkce $y=\frac{x^2}{x}$ není pro $x=0$ definována (dělení 0).

Rozdíl: předpis $y=\frac{x^2}{x}$ můžeme upravit: $y=\frac{x^2}{x}=x \Rightarrow$ funkce $y=\frac{x^2}{x}$ se pro všechna $x\neq 0$ chová jako funkce $y=x$. Jak vypadá obrázek?



Hodnoty funkce $y=\frac{x^2}{x}$ jsou pro všechna $x\neq 0$ stejné jako pro funkci $y=x$. Na chování funkce přímo v bodě, kde limitu určujeme, ale vůbec nezáleží $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$

Předchozí úvahu zachycuje věta o limitě dvou funkcí:

Jestliže pro všechna $x\neq a$ z jistého okolí bodu *a* platí $f(x)=g(x)$ a současně $\lim_{x\to a}g(x)=L$, potom má v bodě *a* limitu i funkce *f* a platí $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$.

Př. 2: Urči limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(2x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2x+1=2\cdot 0+1=1$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{x-3}=\frac{-1-1}{-1-3}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{x-2}=\frac{3+2}{3-2}=5$

U všech předchozích příkladů nejde o nic jiného než o rozklad na součiny. Situaci navíc zjednodušuje číslo *a*, ke kterému se blíží *x* – víme, že se objeví v rozkladech.

Někdy si závorku na zkrácení musíme „vyrobit“.

$$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+2=\sqrt{4}+2=4$$

Př. 3: Urči limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$

a)
$$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{(x+2)-1}=$$
$$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+2}+1=\sqrt{-1+2}+1=2$$

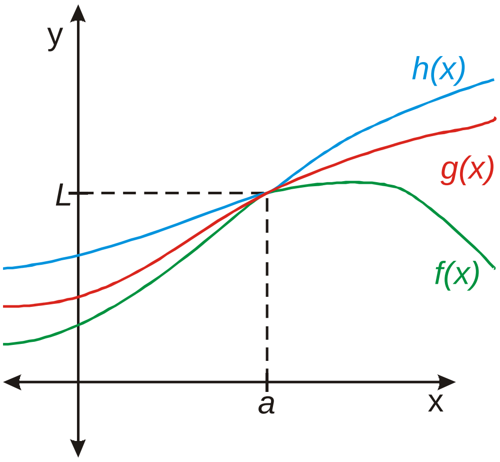
b)
$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(x+4)-4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x}=$$
$$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+4}+2=\sqrt{0+4}+2=4$$

c)
$$\lim\limits_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}\cdot\frac{1+\sqrt{x-3}}{1+\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1-(x-3)}{\left(x^2-16\right)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=$$
$$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{4-x}{(x+4)(x-4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{-1}{(x+4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{(4+4)\left(1+\sqrt{4-3}\right)}=-\frac{1}{16}$$

Věta o třech limitách:

Jestliže pro všechna $x\neq a$ z jistého okolí bodu *a* platí $f(x)\le g(x)\le h(x)$ a současně $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$, potom existuje také limita funkce *g* v bodě *a* a platí $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$

Př. 4: Nakresli obrázek situaci, kterou popisuje předchozí věta.



Funkce $g(x)$ je sevřena mezi funkce $f(x)$ a $h(x)$ $\Rightarrow$ pokud se obě tyto funkce blíží v okolí bodu a ke stejné limitě, musí se k této limitě blížit i funkce $g(x)$

Pomocí předchozí věty je možné dokázat důležitou limitu: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Velké množství limit, které obsahují goniometrické funkce, se řeší převedením na $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Věta o počítání s limitami:
Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, potom platí:

- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=A+B$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=A-B$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\cdot B$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B}$ za předpokladu, že platí $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

S předchozí větou se již dá ledacos vypočítat:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\cos 0}\cdot 1=1$$

Pedagogická poznámka: Problémem u výpočtu limit, které obsahují goniometrické funkce je znalost vzorců. Buď potřebné vzorce napíšeme na tabuli nebo studentům rozdám tabulky, aby se hodina místo počítání limit nezvrhla na hledání vzorců.

Př. 5: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}\right)$

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{3x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot 1=2$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sin^2 x\right)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1\cdot 1=-1$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1+\frac{1}{1}=2$$

Netriviální limity můžeme počítat i v jiných bodech než nula.

Př. 6: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos x}{1+\cos 2x}$

a)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cdot\cos x}{1+\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x+\left(1-\sin^2 x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x+\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cdot\cos^2 x}{2\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$$

Př. 7: Petáková:

strana 152/cvičení 3 b) c) d) f)
strana 152/cvičení 4 a)
strana 153/cvičení 6 c) f) g) i)
strana 153/cvičení 7 b) d) g)
strana 153/cvičení 8 b)
strana 153/cvičení 9 e) g)
strana 154/cvičení 10 b) d)

Shrnutí: